МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

II

СБОРНИК ПОДГОТОВИЛИ:
Э. Винберг, В. Гутенмахер, Е. Дынкин, Т. Кузнецова (художник), М. Шубин

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1965

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

II

СБОРНИК ПОДГОТОВИЛИ:
Э. Винберг, В. Гутенмахер, Е. Дынкин, Т. Кузнецова (художник), М. Шубин

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

В вечерней математической ШКОЛЕ

Занятия в ВМШ происходят один раз в неделю. 7-ые классы занимаются по субботам с I6 часов до I8 час.30 мин. в помещении школы № 2 /Ленинский просп. д.58 а/. В это же время занимается группа шестиклассников. / Список руководителей групп дается на стр. 29 /.

Лекции для 8-х классов читаются по вторникам с I6 до I8 час. в ауд.0.2 главного здания МГУ на Ленинских горах. Групповые занятия происходят по вторникам с I8 до 20 час. в зданиях МГУ на Ленинских горах и в школе № 2.

Лекции для 9-II классов читаются по пятницам с I6 до I8 час. в ауд.0.2. С расписанием групповых занятий можно познакомиться в часы лекций, а также на стендах ВМШ в МГУ /возле ауд.0.2/ и в школе № 2.

Телефон для справок А В 7-I7-69.

КОНКУРС задач ВМШ

В конкурсе могут участвовать все школьники 7–11 классов. Решения задач следует представлять в письменном виде руководителям групп ВМШ или присылать по адресу: Москва В-234, МГУ, мех.-мат.ф-т, ком. I2-22, ВМШ. Примерно раз в два месяца будут подводиться итоги соревнования и победители получат премии.

Помещаем дальнейшие конкурсные задачи / начало см. в первом сборнике "Математическая школа"/.

7-ые классы. Срок 23 октябрь

8. Доказать, что для любого натурального числа n, $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на I20.

9. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Доказать, что общее число рыцарей делится на 4.

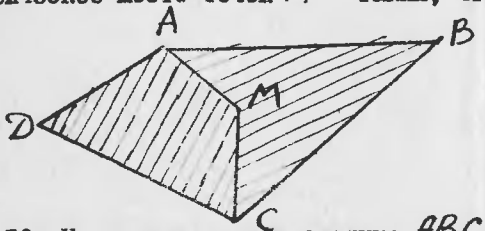
I0. Дан произвольный треугольник. На каждой его стороне во внешнюю сторону строится равносторонний треугольник. Доказать, что центры этих равносторонних треугольников образуют равносторонний треугольник.

II. Даны на плоскости три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка – одна из его вершин. Построить этот треугольник.

I2. В городе Лиссе I0 000 телефонов. Их номера задаются четырьмя цифрами. В центральном районе установлено более половины всех телефонов. Доказать, что хотя бы один из номеров центральных телефонов равен сумме номеров двух других центральных телефонов.

8-ые классы. Срок 26 октября

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найти геометрическое место точек M таких, что $S_{ABCM} = S_{ADCM}$.



В Фишман

I0. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABM, BCN, CAK. Доказать, что окружности, описанные вокруг этих треугольников, и прямые AN, BK и CM пересекаются в одной точке O.

II. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между I000 и 2000.

I2. Между пятью различными точками плоскости имеется I0 попарных расстояний. Как расположить точки, чтобы среди этих десяти чисел не было трех попарно различных? Постарайтесь найти все возможные расположения.

I3. Ученик ВМШ в течение года решает задачи; каждый день хотя бы по одной задаче. Каждую неделю, чтобы не переутомляться, он решает не больше I2 задач. Доказать, что найдется несколько последовательных дней, в которые он решит ровно 20 задач.

9-11 классы. Фок

5 ноябрь

6. Имеется 2к+I карточек, занумерованных последовательными натуральными числами от I до 2к+I. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

7. Доказать, что в числе $(6+\sqrt{37})^{999}$ первые 999 знаков после запятой нули.

8. Решить уравнение

$$2^{-|x|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|x+1|+|x-1|\right).$$

9. Имеется бумага, разграфленная на квадраты со стороной Iсм. Докажите, что кусочек картона с площадью I кв.см, имеющий произвольную форму, можно положить на эту бумагу так, чтобы он не закрывал ни одной вершины квадратов.

I0. Между шестью различными точками в пространстве имеется I5 попарных расстояний. Можно ли выбрать точки так, чтобы среди этих I5 чисел не было трех попарно различных? Если такие расположения существуют, то попытайтесь описать их все.

ОДНА АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

С. А. Яновская

В некотором множестве введена операция "о", обладающая свойствами:

I. Для любых a, b, c $(a \circ b) \circ c = b \circ (c \circ a)$

2. Если $a \circ b = a \circ c$, то $b = c$.

3. Если $a \circ c = b \circ c$, то $a = b$.

Докажите, что эта операция коммутативна и ассоциативна, т.е. что $a \circ b = b \circ a$ и $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

10-е КЛАССЫ.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ТЕМУ „Евклидова метрика". Е.Б. ДЫНКИН

35. **Сферой радиуса** r с центром в точке x_0 называется множество точек x, таких, что $|x-x_0|=r$. Доказать, что пересечение сферы и линейного многообразия M либо пусто, либо состоит из одной точки, либо представляет сферу в M.

36. В трехмерном пространстве дан тетраэдр $ABCD$ /см. рис.I/. Известно, что $AD \perp BC$, $AB \perp DC$. Доказать, что $AC \perp BD$.

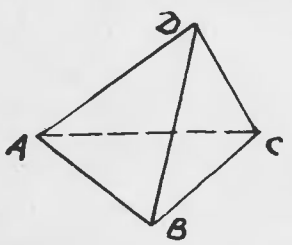


Рис 1.

37. В n-мерном арифметическом евклидовом пространстве рассматривается линейное пространство P, которое определяется системой k независимых однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0. \end{cases}$$

Доказать, что векторы $a_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),\ldots,\ a_k=(a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn})$ образуют базис в ортогональном дополнении к P.

38. Доказать, что расстояние от точки $y_0=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ до гиперплоскости M, определяемой уравнением $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+d=0$, выражается формулой

$$\rho(y_0,M)=\frac{|a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n+d|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}.$$

39. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим симплекс S с вершинами $x_0=0, x_1=a_1e_1, x_2=a_2e_2, \ldots, x_n=a_ne_n$.

а/ Пусть R -расстояние от x_0 до $n-1$ -мерной грани $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}.$$

б/ Найти радиус и центр сферы, проходящей через точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

в/ Найти радиус шара, вписанного в S.

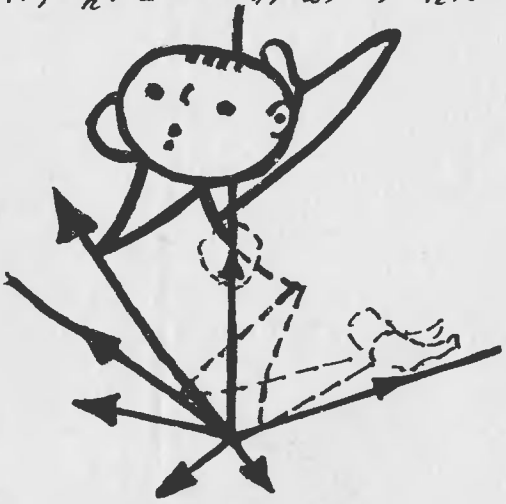
г/ Вывести из а/, б/ и в/ известную теорему элементарной геометрии: в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанного и описанного кругов.

40. В n-мерном арифметическом евклидовом пространстве найти характеристику подпространств:

а/ $x_1=0$;

б/ $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

41. Рассмотрим $n-1$ - мерные подпространства P и Q, заданные, соответственно, уравнениями $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$, и $b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=0$. Доказать, что наибольший угол между P и Q совпадает с углом между векторами $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.



Задачи давались для решения во время летних каникул 1965 года ученикам математических классов школы № 2, переходящим в 10 класс.

Задачи были разбиты на серии по содержанию /но не по трудности/. Задачи, которые казались составителям более трудными, были отмечены звездочками. Однако, если оценивать трудность задач по результатам конкурса, то звездочки придется ставить совсем по другому. Так никому не удалось сделать полностью задачи № 1/серия 1/, 4 /серия 3/ и 1 /серия 5/.

Результаты конкурса таковы:

Первая премия: Евстигнеев Игорь.

Вторые премии: Гусей-Заде Сабир, Натанзон Сергей, Полин Сергей.

Третьи премии: Вейбер Вячеслав, Кузнецов Сергей, Осетров Дмитрий.

Четвертые премии: Аверкин Алексей, Балакирев Владимир, Иглицкий Александр.

Специальную премию за задачу 1 серии 1 получил Эмиль Соболь.

Мы приведем сначала формулировки всех задач, а потом дадим обзор решений.

ЗАДАЧИ

Серия I

I. Некоторый треугольник ABC на комплексной плоскости при умножении на какое-то комплексное число λ переходит в свою часть. Доказать, что тогда и равносторонний треугольник A'B'C' с центром в точке 0 при умножении на λ переходит в свою часть.

/Е.Б.Дынкин/

2. Некоторый тетраэдр ABCД при вращении вокруг какой-то оси на какой-то угол φ и сжатии с коэффициентом k к какой-то точке этой оси переходит в свою часть. Верно ли, что тогда и для правильного тетраэдра A'B'C'Д' существует такая ось и такая точка на этой оси, что при повороте вокруг этой оси на тот же угол φ и сжатии к этой точке с тем же коэффициентом k тетраэдр A'B'C'Д' переходит в свою часть? / Ответ неизвестен/.

/ Е.Б.Дынкин/

Серия 2

ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

I. Если точка M не принадлежит линейному многообразию, натянутому на точки $A_1,\dots,A_k$, то M можно отделить от A_1, $A_2,\dots,A_k$ гиперплоскостью.

/Е.Б.Дынкин/

2. Доказать, что размерность максимальной грани на единицу меньше размерности выпуклого многогранника. /Размерностью грани называется размерность линейного многообразия, натянутого на эту грань/.

/Е.Б.Дынкин/

3. Пусть Q - единичный куб, т.е. выпуклая оболочка 2^n точек n-мерного пространства $a_1e_1+a_2e_2+\dots a_ne_n$ / $e_1,\dots,e_n$ - базис пространства; каждое из чисел $a_1,\dots,a_n$ равно 0 или 1/. Пусть M - множество всех линейных форм ℓ

таких, что $|\ell(x)| \leq 1$ при всех $x \in Q$. Показать, что М – выпуклый многогранник в пространстве линейных форм и найти все вершины М.

/А.Геронимус/

4. Пусть Π_1, Π_2 и Π – три линейных многообразия в n-мерном пространстве. Доказать, что если Π содержится в объединении Π_1 и Π_2, то Π содержится либо в Π_1, либо а Π_2.

/ А.Толпыго/

С е р и я 3

ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

/Е.Б.Дынкин/

Обозначим через К поле вычетов по простому модулю р /это поле состоит из элементов 0,1,2,...,Р-1;чтобы сложить или перемножить два элемента, надо произвести соответствующее действие в обычной арифметике, а затем взять остаток от деления на р/. Все определения и теоремы из теории векторных пространств сохраняются, если под числами понимать элементы поля К. Условимся обозначать через K^n n-мерное арифметическое пространство над полем К.

1. Сколько в пространстве K^n различных подпространств размерности m ? Сколько n – мерных линейных многообразий?

2. Сколько в K^4 пар /двумерных/ плоскостей каждого из типов: 1/ параллельных, 2/скрещивающихся, 3/пересекающихся по точке, 4/ пересекающихся по прямой, 5/совпадающих? Какой из этих случаев является самым частым и какой самым редким?

3. Какова вероятность, что выбранные наудачу в K^n k – мерное линейное многообразие Π_1 и ℓ -мерное линейное многообразие Π_2 пересекаются по m -мерному линейному многообразию? не пересекаются?скрещиваются?/Чтобы подсчитать вероятность какого-нибудь условия, надо поделить число пар, удовлетворяющих этому условию, на общее число пар Π_1, Π_2/.

4. Что более вероятно: совместность или несовместность системы m линейных уравнений с n неизвестными? /Коэффициенты случайно выбираются из К/.

Серия 4

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

I. График функции $\varphi(x)$- ломаная с вершинами $(2к,0)$ и $(2к+1,1)$ / к = $0,\pm1,\pm2,\ldots$ /. Доказать, что если $f(x)$-непрерывная функция на отрезке $[a,в]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^в f(x)\varphi(nx)dx = \frac{1}{2}\int_a^в f(x)dx.$$

/С.Молчанов/

2. График функции $\psi(x)$- ломаная с вершинами $(2к,0)$, $(4к+1,1)$, $(4к-1,-1)$ /к=$0,\pm1,\ldots$/ . Доказать, что если $f(x)$ -непрерывная функция на отрезке $[a,в]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^в f(x)\psi(nx)dx = 0.$$

/С.Молчанов/

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{2} e^{thx}\frac{nx}{1+n^2x^2}dx.$$

/А.Д.Вентцель/

Серия 5

В задачах этой серии $f(x)$ - непрерывная функция на полупрямой $[0,+\infty)$.

I. Доказать, что если при любом $x\geq 0$ и при любом $h>0$ $\sum_{n=0}^{\infty} f(x+nh) = +\infty$, то $\int_0^{\infty} f(x)dx = +\infty$

/А.Каток/

* 2. Если при любом $h>0$ $f(nh)\to 0$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

/ Е.Б.Дынкин/

* 3. Пусть $c_1<c_2<\ldots<c_n<\ldots$ и $c_{n+1}-c_n\to 0$. Если при любом $x>0$ $f(x+c_n)\to 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

/Е.Б.Дынкин/

4. Может ли $f(x)$ не стремиться к нулю при $x\to+\infty$, если при любом x $f(x+n)\to 0$?

/Е.Б.Дынкин/

С е р и я 6

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ АНАЛИЗА

* I. Пусть n_k - возрастающая последовательность натуральных чисел, причем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}=\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k}>1$$

Доказать, что число $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k}+\ldots$ иррационально.

/А.Каток/

* 2. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция с периодом I, α - иррациональное число. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)+f(x+\alpha)+f(x+2\alpha)+\ldots+f(x+(n-1)\alpha)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

/И.Новиков/

* 3. Функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную первую и вторую производные на отрезке $[0,1]$. Известно, что ее максимум на этом отрезке равен I и что $f(0)=f(1)=0$. Доказать, что в некоторой точке c $f''(c)\le -8$.

/А.Геронимус/

Серия 7

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ АЛГЕБРЫ

* I.Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ – произвольные многочлены от t. Доказать, что всегда найдется ненулевой многочлен от двух неизвестных $R(x,y)$, такой, что $R[P(t), Q(t)]=0$.

/ И.Новиков/

* 2. Пусть в n – мерном векторном пространстве введено неравенство векторов $x>y$, удовлетворяющее следующим условиям:

а/если $x\neq y$, то либо $x>y$, либо $y>x$.

б/если $x>y$ и C – положительное число, то $cx>cy$

в/если $x>y$ и $z>u$, то $x+z>y+u$

Доказать, что найдется базис $e_1,\ldots,e_n$ такой, что неравенство $a_1e_1+ a_2e_2+ \ldots + a_ne_n> b_1e_1+ b_2e_2+ \ldots + b_ne_n$ выполняется тогда и только тогда, когда $a_1>b_1$, или $a_1=b_1$, но $a_2>b_2$ или $a_1= b_1$, $a_2=b_2$, но $a_3> b_3$ и т.д.

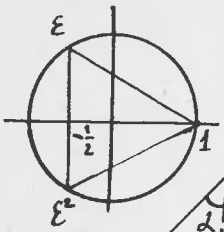
/ Е.Б.Дынкин/

ОБЗОР РЕШЕНИЙ

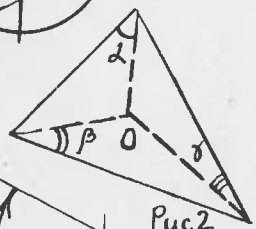
Серия 1

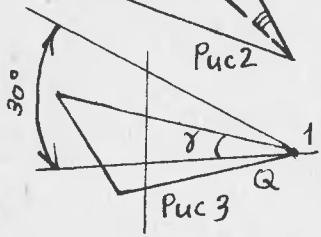
Было представлено только одно решение I-й задачи, притом содержащее некоторые пробелы. Вторая задача решения не получила и ответ на нее до сих пор никому неизвестен.

Заметим, что если два треугольника Q_1 и Q_2 получаются друг из друга умножением на какое-нибудь комплексное число λ и если $\lambda Q_1 \subset Q_1$, то $\lambda Q_2 \subset Q_2$. Поэтому можно рассматривать только треугольники, у которых одна вершина в точке I. Если треугольник равносторонний и центр его в 0, то другие две вершины лежат в точках ε и ε^2, где $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. Обозначим этот треугольник через Q_0 /рис.I/. Требуется



доказать, что если $\lambda Q \subset Q$ для какого-нибудь треугольника, то $\lambda Q_0 \subseteq Q_0$ или, что равносильно $\lambda \in Q_0$. Если $\lambda Q \subset Q$ и $\lambda \neq 1$, то $0 \in Q$. Один из углов α, β, γ /рис.2/ не превосходит 30°. Не ограничивая общности можно считать, что вершина этого угла находится в точке 1. Тогда $\lambda = \lambda \cdot 1 \in Q$ и, следовательно, λ лежит под прямой, соединяющей точки 1 и ε /рис.1 и 3/. Аналогично доказывается, что λ лежит над прямой 1, ε^2.





Остается показать, что $Re\,\lambda \geq -\frac{1}{2}$.

То, что треугольник $z_1 z_2 z_3$ при умножении на λ переходит в себя, можно записать формулами

$$\begin{aligned} \lambda z_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\ \lambda z_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\ \lambda z_3 &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 \end{aligned} \qquad /I/$$

где коэффициенты a_{ij} неотрицательны и их сумма в каждой строчке равна 1. Мы имеем однородную систему уравнений относительно z_1, z_2, z_3. Эта система имеет решение для тех и только тех λ, для которых определитель

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

обращается в нуль. Этот определитель является многочленом

третьей степени относительно λ и его коэффициент при λ^2 равен $a_{11}+a_{22}+a_{33} \geq 0$. По теореме Виета этот коэффициент равен сумме корней многочлена. Но система /I/ совместна при $\lambda = 1$ и поэтому $P(1)=0$. Если $P(\lambda)=0$, то $P(\bar{\lambda})=0$ и при невещественном λ мы имеем три корня I, λ, $\bar{\lambda}$. Следовательно, $\lambda+\bar{\lambda}+1>0$ и $2Re\,\lambda=\lambda+\bar{\lambda}>-1$. Случай вещественного λ легко рассмотреть геометрически.

Более общая задача, относящаяся к любым выпуклым многоугольникам, решена в работах:

Н.Дмитриев и Е.Дынкин " Характеристические корни стохастических матриц", Известия Академии наук СССР,сер.мат., I0/I946/,I67-I84,

Ф.И.Карпелевич " О характеристических корнях матриц с неотрицательными элементами", там же I5/I95I/,36I-383.

Серия 2.

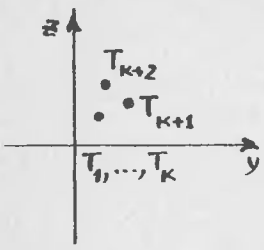
Задача I решена многими участниками конкурса. Приведем одно из решений.

Рассмотрим векторы $l_1=A_1-A_\kappa,\ldots, l_{\kappa-1}=A_{\kappa-1}-A_\kappa$ и $l_0=M-A_\kappa$. Пусть $e_1,\ldots,e_m$ -базис в линейной оболочке векторов $l_1,\ldots, l_{\kappa-1}$. Система $e_0,e_1,\ldots,e_m$ линейно независима. Дополним ее до базиса $e_0,e_1,\ldots,e_m,\ldots,e_{n-1}$ всего пространства. Рассмотрим линейную форму l, для которой $l(e_0)=1$, $l(e_1)=\ldots=l(e_{n-1})=0$. Гиперплоскость отделяющая M от $A_1,\ldots, A_\kappa$, может быть задана формулой $l(x)=l(A_\kappa)+1/2$.

Задачу 2 решили полностью лишь Евстигнеев, Натанзон и Осетров. Приведем решение, принадлежащее Евстигнееву.

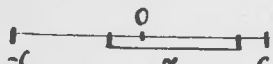
Пусть N -максимальная грань многогранника Q. Параллельным переносом можем добиться того, чтобы одной из вершин N была точка 0. Так как N - грань, то существует линейная форма $l'(x)$, такая, что l' равна 0 на N и больше нуля в остальных точках Q. Если размерность N меньше $n-1$, то существует другая линейная форма $l(x)$, не пропорциональная $l'(x)$ и такая, что $l(N)=0$. Пусть $A_1,\ldots, A_\kappa$ - вершины N, $A_{\kappa+1},\ldots, A_{\kappa+\tau}$ -остальные вер-

вины Q . Поставим в соответствие каждой вершине A_i -точку T_i арифметической плоскости с координатами $(l(A_i), l'(A_i))$. Все вершины N при этом перейдут в начало координат, а остальные вершины перейдут в точки верхней полуплоскости $z>0$. Легко теперь найти на плоскости линейную форму $q=z+\alpha y$ / α - действительное число/, такую, что $q(T_m)>0$ при всех m и $q(T_{k+i})=0$ для некоторого $i>0$. Если $r\geq 2$, то линейная форма $l'(x)+\alpha l(x)$ в исходном пространстве определит грань многогранника Q , содержащую грань N и не совпадающую с Q , что противоречит максимальности N . Случай, когда $r=1$ легко рассматривается непосредственно.



Задачу 3 также удалось решить троим: Балакиреву, Евстигнееву и Натанзону. Вот краткий набросок решения.

Форма $l(x)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$ принадлежит M тогда и только тогда, когда сумма всех положительных a_i не превосходит 1, а сумма всех отрицательных не меньше -1. Таковы, в частности, формы, у которых один коэффициент равен 1 /или -1/, а остальные нули, и формы, у которых один коэффициент равен 1, один равен -1, а остальные по-прежнему нули. Совокупность этих форм /их всего $n(n+1)$ / обозначим через S . Докажем, что S есть множество всех вершин многогранника M. Для этого покажем, что если линейная форма $x(l)=x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n$ не превосходит c на S , то она не превосходит c и на всех $l\in M$. В самом деле, по определению S $\max|x_i|\leq c$ и $\max|x_i-x_j|\leq c$. Поэтому можно выбрать отрезок J длины c , содержащийся в отрезке $[-c,c]$ и содержащий все точки x_i . Очевидно, $0\in J$. Пусть для определенности $a_1,\dots,a_k\geq 0$, а $a_{k+1},\dots,a_n\leq 0$. Положим $\alpha=1-a_1-\dots-a_k\geq 0$, $\beta=-a_{k+1}-\dots-a_n\leq 0$. Так как $x_i\in J$, то $a_1x_1+\dots+a_kx_k+\alpha\cdot 0\in J$ и $-a_{k+1}x_{k+1}-a_{k+2}x_{k+2}-\dots-a_nx_n-\beta\cdot 0\in J$. Но тогда



$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n \le c$. Итак M есть выпуклая оболочка точек множества S.

Чтобы показать, что точки S являются вершинами, остается найти для каждой точки форму $x(l)$, отделяющую ее от остальных. Это не представляет труда. Например точка $(1,-1,0,\dots,0)$ отделяется формой $x(l)=a_1-a_2$, а точка $(1,0,\dots,0)$ формой $x(l)=a_1+\varepsilon a_2+\varepsilon a_3+\dots+\varepsilon a_n$, где $0<\varepsilon<\frac{1}{n-1}$.

Задача 4 решена многими. Легко заметить, что если $x,y\in\Pi$, $x\in\Pi_1$, $y\in\Pi_2$, $x\bar{\in}\Pi_2$, $y\bar{\in}\Pi_1$, то прямая, проходящая через точки x и y, имеет с Π_1 и Π_2 по одной общей точке, что противоречит включению $\Pi\subset(\Pi_1\cup\Pi_2)$.

Серия 3.

Серия 3 оказалась сравнительно трудной. Так задачу 2 полностью решили лишь Гусейн-Заде и Полин, задачу 3 только Гусейн-Заде, а задача 4 не решена никем.

Приведем краткие указания к решению этих задач. Подпространство размерности r пространства K^n содержит p^r векторов. Линейно независимую упорядоченную систему из m векторов в K^n можно выбрать $(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{m-1})$ способами. /В самом деле, первый ненулевой вектор выбирается p^n-1 способом, 2-й неколлинеарный первому p^n-p способами, 3-й не лежащий в двумерном подпространстве, натянутом на первые 2, p^n-p^2 способами и т.д./. В одном m-мерном подпространстве имеется $(p^m-1)(p^m-p)\dots(p^m-p^{m-1})$ упорядоченных базисов. Поэтому число m-мерных подпространств K^n равно

$$\Pi_n^m=\frac{(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{m-1})}{(p^m-1)(p^m-p)\dots(p^m-p^{m-1})}=\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\dots(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\dots(p-1)}.$$

Число линейных многообразий размерности m в K^n равно

$$M_n^m=p^{n-m}\Pi_n^m,$$

так как все линейные многообразия получаются из подпространств

сдвигами на векторы дополнительного подпространства.

Перейдем к задаче 2. Будем рассматривать упорядоченные пары плоскостей. Совпадающих пар $M_4^2 = p^2(p^2+1)(p^2+p+1)$. Параллельных пар $p^2(p^2-1)\Pi_4^2 = p^2(p^4-1)(p^2+p+1)$ Число пар, пересекающихся по точке равно $p^4 \cdot \Pi_4^2 \frac{(p^4-p^2)(p^4-p^3)}{(p^2-1)(p^2-p)} =$ $= p^3 \Pi_4^2$, а число пар, пересекающихся по прямой равно $M_4^1 \frac{(p^4-p)(p^4-p^2)}{(p^2-p)(p^2-p)} = p^4(p+1)^2(p^2+1)(p^2+p+1)$

/ объяснение последних двух формул см. в комментариях к задаче 3./ Все остальные пары плоскостей будут скрещивающимися.

Задача 3. Обозначим число упорядоченных пар плоскостей (Π_1, Π_2) размерностей k и ℓ, пересекающихся по m-мерному многообразию, через $P_{k,\ell}^m$. Сдвигая эти многообразия, получим пару подпространств (Π_1', Π_2'), пересекающихся по m-мерному подпространству Π. Поэтому искомое число

$$P_{k,\ell}^m = M_n^m \cdot U_{k,\ell}^m,$$

где $U_{k,\ell}^m$ – число пар подпространств (Π_1', Π_2') пересекающихся по данному подпространству Π размерности m /размерности Π_1' и Π_2' равны k и ℓ /. Выберем в Π фиксированный базис. Его можно дополнить до упорядоченной линейно независимой системы k векторов $(p^n-p^m)(p^n-p^{m+1})\ldots(p^n-p^{k-1})$ способами. При этом одно и то же k-мерное подпространство получается $(p^k-p^m)(p^k-p^{m+1})\ldots(p^k-p^{k-1})$ раз. Итого общее число k-мерных подпространств, содержащих Π, будет

$$\frac{(p^n-p^m)\ldots(p^n-p^{n-1})}{(p^k-p^m)\ldots(p^k-p^{k-1})}.$$

В каждом из этих случаев базис в Π можно дополнить до базиса Π_2'

$$\frac{(p^n-p^k)\ldots(p^n-p^{k+\ell-m-1})}{(p^\ell-p^m)\ldots(p^\ell-p^{\ell-1})}$$

способами, при этом Π_2' будет пересекаться с Π_1' точно по Π. Поэтому

$$U^{m}_{\kappa,e}=\frac{(\rho^{n}-\rho^{m})(\rho^{n}-\rho^{m+1})\dots(\rho^{n}-\rho^{\kappa+e-m-1})}{(\rho^{\kappa}-\rho^{m})\dots(\rho^{\kappa}-\rho^{\kappa-1})(\rho^{e}-\rho^{m})\dots(\rho^{e}-\rho^{e-1})}$$

Число параллельных пар равно $M^{\kappa}_{n}\cdot M^{e}_{\kappa}(\rho^{n-\kappa}-1)$ /считая $\kappa>e$/ Все остальные пары скрещиваются.

В задаче 4 фактически надо найти число способов, которыми можно выбрать в K^{m} систему из $(n+1)$-го вектора так, чтобы $(n+1)$-й вектор линейно выражался через первые n. Затем надо посчитать для каждого e число таких способов при условии, что линейная оболочка первых n векторов имеет размерность e, а затем сложить все получившиеся числа. Однако таким образом получается весьма громоздкое выражение. Простая форма ответа нам неизвестна.

Серия 4.

Каждая задача 4-й серии решена многими школьниками. Задача 2 сводится к задаче I, если положить $\varphi(x)=\psi(x)+1/2$.

Задача I решается так. Утверждение задачи I очевидно для характеристической функции интервала и потому верно для всех ступенчатых функций. Остается заметить, что если $m(x)\le f(x)\le M(x)$, где $m(x)$ и $M(x)$ - ступенчатые функции, такие, что $M(x)-m(x)<\varepsilon$, то $\int_a^b m(x)\varphi(nx)dx\le \int_a^b f(x)\varphi(nx)dx\le$

$\le \int_a^b M(x)\varphi(nx)dx$, так как $\varphi(x)\ge 0$.

Поэтому при любом $\varepsilon>0$ для всех достаточно больших n имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(nx)dx-\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx\right|<2\varepsilon(b-a),$$

откуда и следует утверждение задачи.

В задаче 3 предел равен нулю.

Серия 5.

Первая задача не получила решения. Ее решение будет дано в одном из следующих выпусков. Остальные задачи были решены многими.

Задача 2. Пусть $f(x)$ не стремится к нулю при $x\to\infty$.

Тогда существует $\varepsilon>0$ и неограниченное открытое множество G точек полупрямой $R^+=(0,+\infty)$, такие, что $|f(x)|>\varepsilon$ при $x\in G$. Задача будет решена, если мы покажем, что существует такое h, что nh попадает в G бесконечное число раз.

Заметим, что если I любой интервал полупрямой R^+, то его кратные nI покрывают все достаточно далекие точки R^+. Поэтому открытое множество $G_m=\bigcup_{n=m} n^{-1}G$ пересекается с любым интервалом и потому всюду плотно в R^+. А тогда его дополнение F_m нигде не плотно в R^+ и поэтому $\bigcup_{m=1} F_m$ не может совпадать с R^+. Следовательно, существует $h>0$, такое, что h принадлежит всем G_m. Легко видеть, что это и есть искомое h. Решение задачи 3 во многом аналогично решению задачи 2. Как и в задаче 2, достаточно показать, что если G неограниченное открытое множество в R^+, то существует такое x, что $x+c_n$ бесконечно много раз попадает в G. / Можно считать, что $c_n\to\infty$, иначе $f(x)=0$ при $x\geqslant x_0$ /. Для любого интервала $I=(a,b)$ $(a<b)$ рассмотрим

$$C_N(I)=\bigcup_{n=N}(c_n+I)=\bigcup_{n=N}(c_n+a,c_n+b).$$

Так как $c_{n+1}-c_n\to 0$, то существует $n_0=n_0(I)$ такое, что $c_{n+1}+a<c_n+b$ для всех $n\geqslant n_0$. Тогда c_n+I пересекается с $c_{n+1}+I$ и $C_N(I)=(c_N+a,\infty)$. Отсюда для любого целого N существует $n\geqslant N$ такое, что $G\cap(c_n+I)$ непусто, то есть $G-c_n\cap I$ непусто. Рассмотрим открытое множество $G_N=\bigcup_{n=N}(G-c_n)$. Приведенное рассуждение означает, что оно плотно на полуоси и поэтому множества G_N имеют непустое пересечение. Любая точка x из пересечения всех G_N будет искомой.

Замечание. Различные усиления и обобщения результатов задач 2 и 3 можно найти в работах J.F.C.Kingman "Ergodic properties of continuos-time Markov processes and their discrete skeletons", Prooeedings of the London Mathematical Society, v.XIII, N52(1963), J.F.C.Kingman " A Note on limits of continuous functions", The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford second series, v.15, N 59, (1964).

Ответ в задаче 4 положительный. Пример: $f(x)$, отличная от нуля только на интервалах $(n, n+\frac{1}{n})$ и на каждом из них достигающая максимума, равного I.

Серия 6.

Задача I этой серии полностью решена Аверкиным, Гусейн-Заде, Евстигнеевым и Натанзоном. Приведем одно из возможных решений.

Из второго условия следует, что ряд $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\dots+\frac{1}{n_k}+\dots$ сходится быстрее некоторой геометрической прогрессии. Пусть $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\dots+\frac{1}{n_k}+\dots = p/q$, где p и q -натуральные числа и пусть ε - любое положительное число. Выберем k_0 так чтобы $\frac{n_{k_0}}{n_1 n_2 \dots n_{k_0-1}} > \frac{q}{\varepsilon}$ и $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \frac{1}{1-\varepsilon}$ при $k \geq k_0$. Имеем $n_2 n_3 \dots n_{k_0-1} + n_1 n_3 \dots n_{k_0-1} + \dots + n_1 n_2 \dots n_{k_0-2} + \frac{n_1 n_2 \dots n_{k_0-1}}{n_{k_0}}\left(1+\frac{n_{k_0}}{n_{k_0+1}}+\frac{n_{k_0}}{n_{k_0+2}}+\dots\right) = n_1 n_2 \dots n_{k-1}\cdot\frac{p}{q} = m + p_1/q$, где m , p_1 -целые числа. Отсюда

$$\frac{n_1 n_2 \dots n_{k_0-1}}{n_{k_0}}\cdot\left(1+\frac{n_{k_0}}{n_{k_0+1}}+\frac{n_{k_0}}{n_{k_0+2}}+\dots\right) = m_1 + \frac{p_1}{q}, \qquad /2/$$

/m_1 тоже целое число/. Но $\frac{n_1 n_2 \dots n_{k_0-1}}{n_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{q}$, $1+\frac{n_{k_0}}{n_{k_0+1}}+\frac{n_{k_0}}{n_{k_0+2}}+\dots < 1+(1-\varepsilon)+(1-\varepsilon)^2+\dots = \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому левая часть /2/ больше нуля, но меньше $\frac{1}{q}$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Задача 2 полностью решена лишь Евстигнеевым и Натанзоном. Функцию f можно считать заданной на окружности длины 1. Пусть I - какой-нибудь интервал на этой окружности, $|I|$ - его длина, Если $k(n)$ - число точек набора $x, x+\alpha, \dots, x+(n-1)\alpha$, попавших в интервал I , то $\left|\frac{k(n)}{n} - |I|\right| \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. / см., например, А.М.Яглом и И.М.Яглом "Неэлементарные задачи в элементарном изложении", задача 88б/. Это совпадает с утверждением зада-

чи в случае, когда f -характеристическая функция интервала I /функция, равная 1 на I и нулю вне I /. Отсюда нужная нам формула получается для любой ступенчатой функции /линейной комбинации характеристических функций интервалов/. Заключая $f(x)$ между близкими ступенчатыми функциями и переходя к пределу, докажем утверждение задачи для любой непрерывной f .

Задача 3 решена многими участниками конкурса. Приведем одно из возможных решений. Пусть максимум достигается в точке x_0 . Пусть для определенности $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$ /противоположный случай рассматривается аналогично/. Имеем $f'(x_0)=0$. Предположим, что при всех x $f''(x) > -8$. Будем рассматривать $x \geq x_0$. При этих x имеем $f'(x) = \int_{x_0}^{x} f''(x)dx > -8(x-x_0)$, отсюда $f(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} f'(x)dx > 1 - 8\frac{(x-x_0)^2}{2} \geq 0$ / так как $x - x_0 \leq 1/2$ /. А это противоречит тому, что $f(1)=0$.

Серия 7.

Эта серия оказалась довольно трудной. Первая задача решена полностью только Полиным, вторая - Евстигнеевым, Натанзоном и Полиным.

Приведем решение задачи I, принадлежащее Полину. Рассмотрим многочлен $R(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i x^j$. Пусть степени P и Q не превосходят m . Тогда условие $R(P,Q)=0$ дает нам не более $2mn+1$ однородных линейных уравнений относительно $(n+1)^2$ коэффициентов a_{ij} /надо приравнять нулю коэффициенты при всех степенях t /. При $n > 2m$ эта система имеет ненулевое решение, которое и дает нам коэффициенты $R(x,y)$.

Задачу 2 естественно решать посредством индукции по n . Рассмотрим в нашем пространстве множества векторов $R^+ = \{x: x \geq 0\}$ и $R^- = \{x: x < 0\}$. Эти множества не пересекаются и $R^+ \cup R^- = R^n$. Кроме того, каждое из них выпукло. Можно показать, что каждое из них содержит открытое полупространство и $\bar{R}^+ \cap \bar{R}^- = R^{n-1}$ есть гиперплоскость. Пусть e_1 -

вектор, являющийся внутренней точкой R^+, а $e_2, \ldots, e_n$ – базис R^{n-1}, обладающий всеми свойствами, указанными в формулировке задачи. Покажем, что если $a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n$, $b=\mu_1 e_1+\ldots+\mu_n e_n$ и $\lambda_1>\mu_1$, то $a>b$. Этим доказательство будет закончено. Рассмотрим $a-b=(\lambda_1-\mu_1)e_1+\ldots$ Очевидно, $a-b\in R^+$ и потому $a-b>0$, откуда $a>b$, что и требовалось доказать.

М. ШУБИН.

Э. Б. ВИНБЕРГ

К понятию действительного числа

Действительное число мыслится как результат бесконечной последовательности измерений со все возрастающей точностью. Давайте посмотрим, какой это может иметь смысл. Известно, что точность физических измерений не превосходит 15 значащих цифр, и есть принципиальные ограничения точности из-за прерывистости материи. Но даже если бы этой трудности не было, все равно бесконечная последовательность измерений никогда не могла бы быть завершена! Поэтому данное выше "определение" действительного числа должно пониматься как мысленный образ.

Можно дать точное определение действительного числа, не используя слова "измерение". Назовем действительным числом всякую бесконечную последовательность рациональных чисел

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \qquad (I)$$

все меньше и меньше отличающихся друг от друга (с чем же еще сравнивать?). Последнее требование следует понимать так: для любого натурального числа m найдется такое n_0, что при $n_1, n_2 > n_0$ $|r_{n_1} - r_{n_2}| < \frac{1}{m}$

Последовательность удовлетворяющая этому условию, называется фундаментальной.

Действительное число, определенное последовательностью (I), следует считать равным действительному числу

$$r_1', r_2', \ldots, r_n', \ldots$$

если $r_n - r_n'$ стремится к нулю при увеличении n, т.е. для любого натурального числа m существует такое n_0, что при $n > n_0$

$$|r_n - r_n'| < \frac{1}{m}.$$

Что же это: игра ума или закрепленный в математическом определении результат познания природы?(Заметим, что к такому определению пришли далеко не сразу, оно выстрадано несколькими поколениями математиков. Но, может быть, это объясняется тем, что правила игры были очень запутанными?)

На этот вопрос не ответишь, если копаться в определении и пытаться физически истолковать каждый его пункт.Надо посмотреть, что можно с этим определением сделать. А сделать, оказывается, можно дифференциальное и интегральное исчисление. А с помощью этого исчисления можно решить разные физические задачи, например, рассчитать прочность какого-нибудь сооружения или орбиту планеты. Это и есть решение нашего вопроса. Ведь если бы определение действительного числа было лишь игрой нашего ума, то ничего кроме продолжения игры, из него не могло бы проистекать.

Правда, понятие действительного числа является идеализацией, оно лишь приблизительно отражает свойства реального мира. Но так всегда бывает в любой науке. Без идеализации ничего не сделаешь. Почитайте по этому поводу прекрасное рассуждение "Что есть сила?" в первом томе"Фейнмановских лекций по физике".

Рассмотрим теперь вопрос: какие задачи надо решать в математике? В этом отношении очень поучителен следующий пример из истории математики. Раньше очень интересовались получением формул для решения алгебраических уравнений

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \qquad (2)$$

вроде известной формулы для решения квадратного уравнения. Такие формулы для уравнений 3-й и 4-й степени были найдены итальянцами в XVI в. Уравнения более высоких степеней не поддавались. В 1824 году Абель окончательно доказал, что для общих уравнений степени 5 и выше невозможно получить желанные формулы. Чтобы точно понять смысл этого результата, надо знать, что в данном случае означает слово"формула" Имеется в виду определенная последовательность арифметиче-

ских операций и извлечений корней (любых степеней), которые надо произвести над числами $a_1, \ldots, a_n$ и определенными целыми числами (например, в формулу для квадратного уравнения входит число 2). Абель доказал, что при $n \geqslant 5$ не существует формулы, которая при любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ давала бы точное решение уравнения (I).

Оставалась возможность, что для каждого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует своя формула. Через несколько лет после работы Абеля французский математик Эварист Галуа нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы такая формула существовала и доказал, что для каждого $n \geqslant 5$ можно указать числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых эти условия не выполняются.

В ходе своих исследований Галуа ввел новые понятия и придумал новые методы, которые имели решающее значение для создания так называемой "теории групп". Начиная с конца XIXв., теория групп получает различные применения в физике. Кроме того, она оказала плодотворное влияние на развитие других разделов математики.

Выходит, что Галуа старался не зря! Но вернемся к его задаче и посмотрим, что она представляет собой с наивной физической точки зрения. Любую величину можно с достаточной степенью точности выразить рациональным числом, т.е. представить как отношение целых чисел. В частности, это относится к решению уравнения (I), и задача Галуа при таком подходе становится бессмысленной! Она приобретает смысл только при абстрактном математическом толковании. Могло бы показаться, что этой задачей заниматься не стоит, однако мы видели, что это не верно.

Итак, не всякое математическое понятие и не всякая теорема имеет ощутимый физический смысл, но из этого не следует, что математика - это плод нашего воображения. Если представить реальный "физический" мир в виде почвы, на которой растет дерево математики, а математические теории - как ветви этого дерева (идущие как от ствола, так и от других вет-

вей),то математика будет похожа на дерево баньян, некоторые ветви которого пускают корни в почву. К этому нужно еще добавить, что ветви переплетаются между собой (не знаю, как обстоит дело с настоящим баньяном). Это убеждает нас в том, что каждая содержательная математическая теория, пусть даже очень абстрактная, отражает какие-то свойства материального мира и не может остаться бесполезной.

ЗАДАЧИ

I. Найти все фундаментальные последовательности,составленные из целых чисел.

2. Являются ли фундаментальными следующие последовательности рациональных чисел:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

б) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$;

в) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$;

г) $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \ldots$;

д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$;

е) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$;

ж) $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \ldots, \frac{n^2}{3n+1}, \ldots$;

з) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2+1}, \ldots$;

и) $1, 1+\frac{1}{1!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}, \ldots$,

к) 0; 0,3; 0,33; 0,333, ...;

л) $1, 1+\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots$,

м) последовательность определенная равенствами

$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$.

3. Какие из фундаментальных последовательностей задачи 2 задают одно и то же действительное число?

4. Доказать, что если последовательности

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

фундаментальные, то последовательности

$a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n, \ldots$

$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$

также фундаментальные.

5. Как следует определять действия над действительными числами?

6. Можно ли рассматривать рациональные числа как частный случай действительных? Если да, то какие к тому основания и какие фундаментальные последовательности следует считать отвечающими рациональным числам?

7. Как следует определять неравенства между действительными числами?

8. Доказать, что между любыми двумя (различными) действительными числами найдется рациональное число.

9. Доказать, что если последовательность фундаментальная, то всякая ее подпоследовательность также фундаментальна и определяет то же действительное число.

10. Что такое $\sqrt{2}$?

11. Доказать, что последовательности л) и м) из задачи 2 определяют $\sqrt{2}$. Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001, используя последовательность м).

12. Пусть дана бесконечная десятичная дробь $c_0, c_1 c_2 \ldots$ (c_0 обозначает целую часть, $c_1, c_2, \ldots$ – какие-то цифры). Рассмотрим последовательность, n -тый член которой равен $c_0, c_1 c_2 \ldots c_n$. Доказать, что эта последовательность всегда фундаментальна.

13. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными десятичными дробями, равны?

14. Доказать, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью.

15. Пусть $c_0, c_1, c_2, \ldots$ – целые числа, причем $c_1, c_2, \ldots$ – положительны. Доказать, что последовательность подходящих дробей бесконечной цепной дроби $c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \ldots}}$ всегда

фундаментальна.

16. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными цепными дробями, равны?

17. Доказать, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной цепной дробью.

18. Последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число z , что все ее члены не превосходят z . Есть ли среди последовательностей задачи 2 неограниченные?

19. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

20. Доказать, что всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность фундаментальна.

21. Доказать, что последовательность, n - тый член которой равен $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, фундаментальна. (Действительное число, определяемое этой последовательностью, обозначается через e)

22. Доказать, что последовательность и) задачи 2 определяет число e . Вычислить его с точностью до 0,001.

Подробные сведения о построении системы действительных чисел можно найти в первом томе "Энциклопедии элементарной математики" (в статье И.В.Проскурякова) или, в другом изложении, в книге Э.Ландау "Основы анализа", Госиноиздат, 1947.

ВЕЧЕРНЯЯ ШКОЛА

Руководитель потока – Александр Львович Розенталь /аспирант кафедры математики Института стали и сплавов/.

Ответственная за подбор конкурсных задач – Лидия Гончарова /МГУ,3 курс/.

Руководители групп:

Группа А: Владимир Гельфанд /МГУ,I курс/,Ольга Дынкина/2шк, IOкл./, Сергей Кузнецов /2шк,IOкл./,Николай Осетинский /2шк,IIкл./

Группа В: Владимир Бариль /МГУ,2 курс/, Александр Бариль /2шк,IOкл./, Вячеслав Вейбер /2шк,IOкл./, Александр Шапиро /2 шк.,IOкл./

Группа С: Татьяна Васильева /МГУ,I курс/,Арон Футер /МГУ, I курс/,

Группа D: Варвара Каменщикова /МГУ, I курс/, Михаил Шифрин /МГУ,I курс/, Владимир Эфроимсон / 2 шк.,9 кл./

Группа Е: Наталья Олейникова /МГУ,2 курс/, Софья Сорокина /МГУ, 2 курс/

Группа F: Александр Орлов /2 шк.,IO кл./,Константин Роменец /2 шк., 9 кл./,Виктор Снисаренко /2шк.,IOкл./, Александр Фомин /2 шк.,IO кл./

Группа G: Григорий Динец /2 шк.,9 кл./,Андрей Латышев /2шк., 9кл./,Иван Чередник /2 шк.,9кл./,Евгений Шальман /2 шк.,9кл./.

Подписано к печати 15/X 1965 г.

Л-49646 Формат 60×90/16

Физ. печ. л. 2,0 Уч.-изд. л. 1,36

Заказ 1488 Тираж 1000

Цена 4 коп.

Издательство
Московского университета
Москва, Ленинские горы
Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ,
Москва, Ленинские горы